A.csopi

(1.) Lineáris Boole függvény.
Az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ háromváltozós lineáris Boole függvények szorzata mikor lehet lineáris?

(2.) Monoton Boole függvény.
Adjuk meg $\mathcal{M}^{(3)} \cap \mathcal{L}^{(3)}$ elemeit, azaz a háromváltozós monoton és lineáris Boole függvényeket.

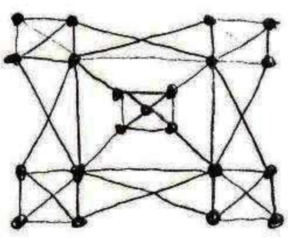
(3.) Önduális Boole függvény.
Önduális-e az $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ ötváltozós Boole függvény?

(4.) Komplementer gráf.
Lehet-e egy gráf izomorf a saját komplementerével?

(5.) Összefüggő komponens gráfban.
Igazoljuk, hogy egy összefüggő gráfból egy élnek az elhagyásával olyan gráfot kapunk, amelyben az összefüggő komponensek száma legfeljebb kettő.

(6.) Kromatikus szám.
A csúcsok V halmazán adott a $\Gamma_1 = (V, E_1)$ és $\Gamma_2 = (V, E_2)$ kétrészes gráf. Igazoljuk, hogy a $\Gamma = (V, E_1 \cup E_2)$ gráf kromatikus száma legfeljebb 4.

(7.) Út és kör gráfban.
Létezik-e Hamilton kör az alábbi gráfban?



B

Boole

1

1.) Lineáris Boole függvény.
Az $f(x_1, x_2, x_3) = 1 + x_1 + x_3$ és $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$ függvények szorzata lineáris-e?

2.) Monoton Boole függvény.
Az alábbi 4-változós lineáris Boole függvények között vannak-e monotonok?
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 + x_2 + x_3 + x_4$
$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_4$
$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$

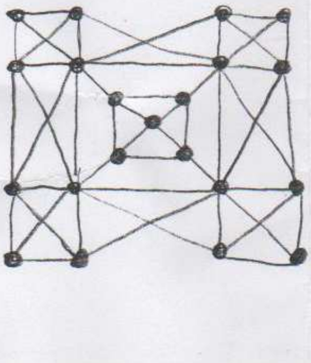
3.) Önduális Boole függvény.
Önduális-e az $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ háromváltozós Boole függvény?

4.) Gráfok izomorfizmusa.
A $\Gamma = (V, E)$ gráfnak $|V| = 10$ csúcsa van. Lehet-e ez a gráf izomorf a saját komplementerével?

5.) Összefüggő komponens gráfban.
Igazoljuk, hogy egy összefüggő gráfból egy élnek az elhagyásával olyan gráfot kapunk, amelyben az összefüggő komponensek száma legfeljebb kettő.

6.) Kromatikus szám.
Igazoljuk, hogy egy fának a kromatikus száma kettő.

7.) Út és kör ~~fában~~ gráfban.
Létezik-e Hamilton kör az alábbi gráfban?



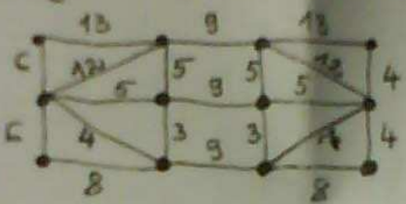
[redacted]

D

1. Az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak és nem izomorfak.

2. Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 72$ és minden <u>csúcs fokszáma</u> legalább 9. Igazoljuk, hogy Γ tartalmaz négy hosszúságú kört. Igaz-e, hogy Γ tartalmaz háromszöget?

3. Adjuk meg az összes minimális költségű feszítőfát.



4. Egy kétosztású gráfban minden csúcs fokszáma 10. Igazoljuk a <u>König-Hall tétel</u> segítségével, hogy Γ-ban létezik teljes párosítás.

5. Igazoljuk, hogy ha f, g és h háromváltozós <u>önduális Boole függvények</u>, akkor $f+g+h$ is ilyen.

6. Adjuk meg az $f(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z)$ <u>Boole függvény nevezetes tulajdonságait</u>.

7. Adjunk példát olyan $f(x,y,z)$ <u>háromváltozós Boole függvényre</u>, amelyre $f \notin P_0 \cup P_1 \cup D \cup M \cup L$

ADJUK MEG AZ ALÁHÚZOTT FOGALMAKAT ÉS TÉTELEKET: 5-BŐL LEGALÁBB 3-AT

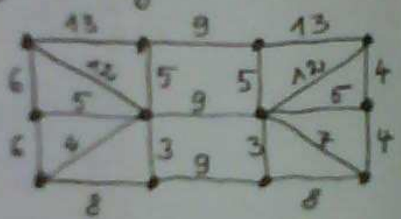
A

[redacted]

1.) Az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak és nem izomorfak?

2.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 56$ és minden csúcs fokszáma legalább 8. Igazoljuk, hogy Γ tartalmaz négy hosszúságú kört. Igaz-e, hogy Γ tartalmaz háromszöget?

3.) Adjuk meg az összes minimális költségű feszítőfát.



4.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 20$ és minden csúcs fokszáma legalább 10. Igazoljuk, hogy Γ-ban létezik teljes párosítás.

5.) Adjuk meg az összes olyan háromváltozós Boole függvényt, amely lineáris és önduális egyidejűleg. Hány ilyen Boole függvény van?

6.) Adjuk meg az $f(x, y, z) = x + y + z + xyz$ Boole függvény nevezetes tulajdonságait.

7.) Adjunk példát olyan $f(x, y)$ kétváltozós Boole függvényre, amelyre $f \notin P_0 \cup P_1 \cup D \cup M \cup L$.

ADJA MEG AZ ALÁHÚZOTT FOGALMAK DEFINÍCIÓJÁT: 5-BŐL LEGALÁBB 3-AT

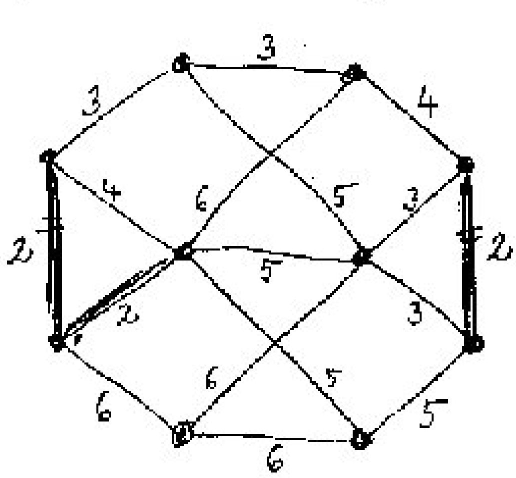
VIZSGADOLGOZAT

1.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 11$ és minden $i \in V$ csúcs fokszáma legalább öt: $d(i) \geq 5$. Igazoljuk, hogy Γ nem síkba rajzolható.

2.) Egy kétrészes Γ gráfban minden csúcs fokszáma legalább öt. Igazoljuk, hogy létezik a gráfban olyan út amelynek a hossza 9 (azaz olyan, amelyik kilenc különböző élből áll).

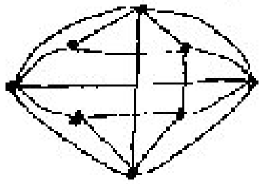
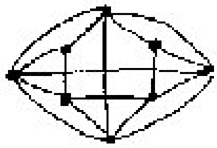
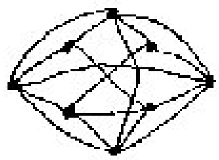
3.) Igazoljuk, hogy a 10 változós Boole függvények között legalább $2^{\binom{10}{5}}$ darab (egymástól különböző) monoton függvény található.

4.) Adjuk meg az alábbi súlyozott élekkel rendelkező gráfban az <u>összes</u> minimális súlyú feszítőfát.



Hatvani Gábor GD7839 G1-BP1 A_1 Dr Szigeti Jenő

(1.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak.

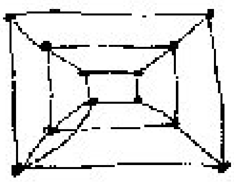
Γ_1:  Γ_2:  Γ_3: 

(2.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 29$ és $d(i) \geq 9$ minden $i \in V$ csúcsra. Igazoljuk, hogy Γ összefüggő komponenseinek a száma legfeljebb 2.

(3.) Adjuk meg a $K_{11,11,7,3}$ teljes négyrészes gráfot. Létezik-e teljes párosítás ebben a gráfban?

* (3)

(4.) Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



(5.) Vizsgáljuk meg az alábbi relációk nevezetes tulajdonságait.

$\alpha = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \text{ és } 6 \mid x+y\}$

$\tau = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \text{ és } 7 \mid x-y \text{ és } x^2 \mid y\}$

$\varepsilon = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N} \text{ és } 7 \mid x-y \text{ és } x^4 \mid y\}$

Igazoljuk, hogy $\tau \circ \tau \subseteq \varepsilon$. Igaz-e, hogy $\tau \circ \tau = \varepsilon$?

(6.) Legyen $H = \{3^k \cdot 5^l \mid 0 \leq k \leq 4 \text{ és } 0 \leq l \leq 5 \text{ egész számok}\}$ és

* $x, y \in H$ esetén $x \leq_\varepsilon y$ pontosan akkor ha $x \mid y$.

Keressünk maximális méretű láncot és antiláncot H-ban a $\leq_\varepsilon$ részben rendezésre nézve. Válaszainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

(5)

$2^5 \cdot 3^4$

D

16-EN

6-1571

1. Adjuk meg az $f(x,y,z) = (\hat{x} \vee \check{y}) \wedge z$ Boole függvény
7) Zsegalkin polinom alakját. Vizsgáljuk meg az f „nevezetes" tulajdonságait.

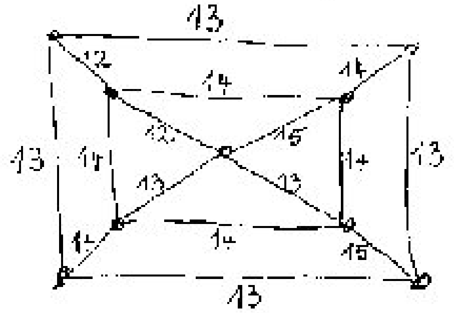
2. Hány eleme van az $\mathcal{L}^{(n)} \cap \mathcal{P}_1^{(n)}$ halmaznak?

3. Igazoljuk, hogy $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_0 = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1$.

4. Igazoljuk, hogy ha $|E| \le |V| - 2$, akkor a $\Gamma = (V, E)$ gráf nem összefüggő.

5. Igazoljuk, hogy ha $\Gamma = (V, E)$ gráf nem tartalmaz K_6-ot, akkor $|E| \le \frac{2}{5}|V|^2$ (azt már tudjuk, hogy $K_5 \not\subseteq \Gamma$ esetén $|E| \le \frac{3}{8}|V|^2$).

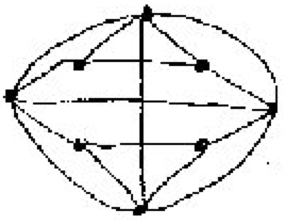
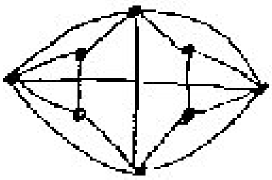
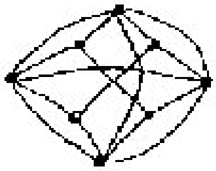
6. Keressünk minimális költségű feszítő-fát az alábbi gráfban.



7. Izomorfak-e az alábbi gráfok?

(B)

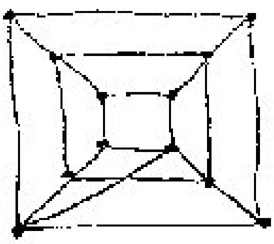
1.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak.

Γ_1: 
Γ_2: 
Γ_3: 

2.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 29$ és $d(i) \geq 5$ minden $i \in V$ csúcsra. Igazoljuk, hogy Γ összefüggő komponenseinek a száma legfeljebb 4.

3.) Adjuk meg a $K_{10,10,7,3}$ teljes négyrészes gráfot. Létezik-e teljes párosítás ebben a gráfban?

4.) Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



5.) Vizsgáljuk meg az alábbi relációk nevezetes tulajdonságait.

$\beta = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}$ és $6 \mid x^2 - y^2$ és $x \mid y\}$
$\gamma = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}$ és $7 \mid x - y$ és $x \mid y^2\}$
$\sigma = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}$ és $7 \mid x - y$ és $x \mid y^4\}$

Igazoljuk, hogy $\gamma \circ \gamma \subseteq \sigma$. Igaz-e, hogy $\gamma \circ \gamma = \sigma$?

6.) Legyen $H = \{2^\alpha \cdot 3^\beta \mid 0 \leq \alpha \leq 5$ és $0 \leq \beta \leq 4$ egész számok$\}$ és $x, y \in H$ esetén $x \leq_g y$ pontosan akkor ha $x \mid y$. Keressünk maximális méretű láncot és antiláncot H-ban a $\leq_g$ részben rendezésre nézve. Választásainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

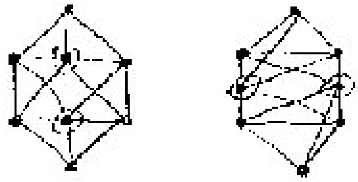
B1: A gráf összefüggő komponenseinek az értelmezése.

B2: A komplementer gráf fogalma.

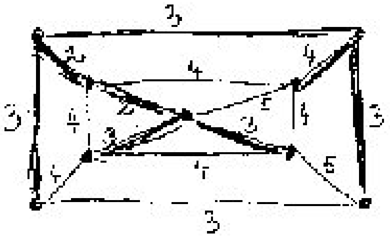
B3: Az ekvivalencia reláció definíciója. Mit nevezünk ekvivalencia osztálynak?

B4: A lineáris Boole függvény definíciója.

1. Izomorfak-e az alábbi gráfok?



2. Keressünk minimális költségű feszítő-fát az alábbi gráfban.



3. Létezik-e teljes párosítás a $K_{30,12,12,4}$ teljes négyrészes gráfban? Nem

$30 > 12+12+4$

4. Legyenek az $\alpha \subseteq A \times A$ és $\gamma \subseteq A \times A$ relációk kompatibilisek az $f: A \times A \times A \times A \to A$ négyváltozós függvényre nézve. Igazoljuk, hogy $\alpha \circ \gamma$ is kompatibilis f-re nézve.

5. Legyen $H = \{3^k \cdot 7^l \mid 0 \le k \le 3,\ 0 \le l \le 8$ egészek$\}$ és $x, y \in H$ esetén $x \le_S y$ pontosan akkor ha $x | y$. Keressünk maximális méretű láncot és antiláncot H-ban a $\le_S$ részben rendezésre nézve. Válaszainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

6. Adjuk meg az $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee x_3$ háromváltozós Boole függvény Zsegalkin polinomját. Vizsgáljuk meg az f nevezetes tulajdonságait.

$a \vee b = a + b + ab$

$f = x_1 x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3$

0-t őrző

1-t őrző

monoton V 1 miatt

nem lineáris

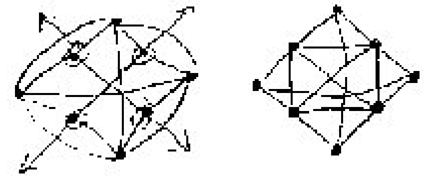
C1: Mikor nevezünk két gráfot izomorfnak?

C2: Mit nevezünk feszítő-fának (fa-váznak) egy gráfban?

C3: Reláció inverzének és relációk szorzatának a definíciója.

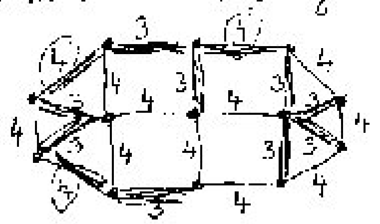
C4: A monoton Boole függvény definíciója.

(1.) Izomorfak-e az alábbi gráfok?



IGEN

(2.) Keressünk minimális költségű feszítő-fát az alábbi gráfban.



(3.) Létezik-e teljes párosítás a $K_{15,15,7,3}$ teljes négyrészes gráfban? IGEN

(4.) Legyenek az $\alpha \subseteq A\times A$ és $\beta \subseteq A\times A$ relációk kompatibilisek az $f: A\times A\times A \to A$ háromváltozós függvényre nézve. Igazoljuk, hogy $\alpha^{-1}\circ\beta$ is kompatibilis f-re nézve.

(5.) Legyen $H=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,\dots,10\}\}$ és $(x_1,y_1)\le_S(x_2,y_2)$ pontosan akkor ha $x_1\le x_2$ és $y_2\le y_1$. Keressünk maximális rendű láncot és antiláncot H-ban a $\le_S$ részben rendezésre nézve. Válaszainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

19 elemű lánc
10 elemű antilánc

(6.) Adjuk meg az $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2)\wedge\overline{x_3}$ háromváltozós Boole függvény Zsegalkin polinomját. Vizsgáljuk meg az f nevezetes tulajdonságait.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_1x_2)\cdot(1+x_3)=x_1+x_2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3$

nem lineáris

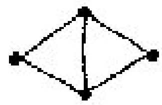
0-őrző ← $f(0,0,0)=0=f(1,1,1)$

nem 1-őrző

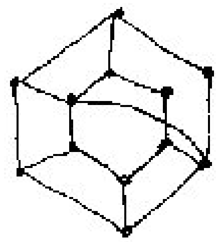
nem önduális

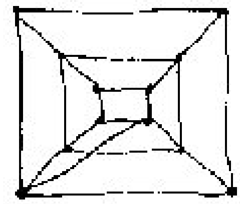
$f(1,1,0)=1\not\le 0=f(1,1,1)$ → nem monoton

8. A $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| \geq 4$ és $|E| > \frac{1}{4}|V|^2$. Igazoljuk, hogy Γ tartalmaz olyan részgráfot, amely izomorf az alábbival.



9. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?
$\ast$





10. Vizsgáljuk meg az alábbi relációk nevezetes tulajdonságait:
$\ast$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ és

~~$\alpha = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ és $10 \mid x^2 - y^2\}$,~~ ~~$6 \mid x^3 - y^3$~~

(6) $\beta = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ és $10 \mid x - y$ és $x \mid y\}$, $6 \mid x^2 - y^2$ és $x \mid y$

$\ast$ $\gamma = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ és $\overset{5}{\underset{7}{\cancel{6}}} \mid x - y$ és $x^2 \mid y^3\}$, $7 \mid x - y$ és $x \mid y^2$

$\ast$ $\sigma = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}$ és $\overset{5}{\underset{7}{\cancel{6}}} \mid x - y$ és $x^4 \mid y^9\}$. $7 \mid x - y$ és $x \mid y^4$

Igazoljuk, hogy $\gamma \circ \gamma \subseteq \sigma$. Igaz-e, hogy $\gamma \circ \gamma = \sigma$?

11. Legyenek az $\alpha \subseteq A \times A$ és $\beta \subseteq A \times A$ relációk
$\ast$ kompatibilisek az $f : A \times A \times A \to A$ háromváltozós függvényre
(4) nézve. Igazoljuk, hogy ekkor $\alpha \circ \beta$ is kompatibilis f-re nézve.

12. Legyen $f : A \times A \times A \to A$ egy háromváltozós Malcev függvény. Igazoljuk, hogy ekkor a

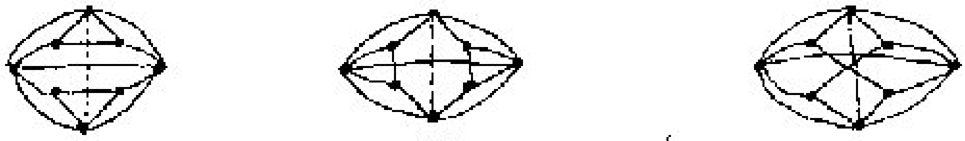
$$g(x, y, z) = f\big(f(x, z, y), f(y, z, x), f(x, y, z)\big)$$

módon értelmezett $g : A \times A \times A \to A$ függvény is Malcev tulajdonságú.

13. Legyen $H = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ és $(x_1, y_1) \leq_g (x_2, y_2)$ pontosan akkor ha $x_1 \leq x_2$ és $y_1 \leq y_2$. Keressünk maximális méretű láncot és antiláncot H-ban a $\leq_g$ részben rendezésre nézve. Választásainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

(1.) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi gráfok között vannak-e egymással izomorfak.

*



$\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \not\cong \Gamma_3$

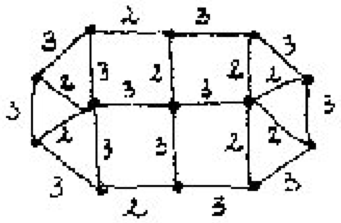
(2.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 29$ és $d(i) \geq \cancel{4}\ 5$ minden $i \in V$ csúcsra. Igazoljuk, hogy Γ összefüggő komponenseinek a száma legfeljebb $\cancel{5}\ 4$.

*

(3.) Igazoljuk, hogy ha a $\Gamma = (V, E)$ gráf egy fa, akkor

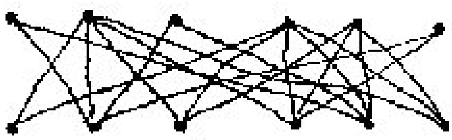
$$\max\{d(i) \mid i \in V\} \leq |\{i \in V \mid d(i) = 1\}|.$$

(4.) Keressünk egy minimális költségű feszítőfát (favázat) az alábbi gráfban.



(5.) Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 100$ és $|E| \geq 2501$. Igazoljuk, hogy Γ-ban van páratlan hosszúságú kör.

(6.) Létezik-e teljes párosítás az alábbi gráfban?



(7.) Adjuk meg a $\cancel{K_{20,10,7,5}}\ K_{10,10,7,3}$ teljes négyrészes gráfot. Létezik-e teljes párosítás ebben a gráfban? Létezik-e Hamilton kör ebben a gráfban?

*

A1: Adjuk meg a fa gráf definícióját.

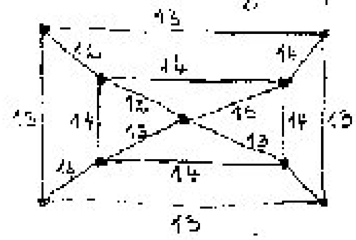
A2: Mit nevezünk teljes párosításnak egy gráfban?

A3: A részben rendezés definíciója. A lánc és az antilánc értelmezése.

A4: Az önduális Boole függvény definíciója.

(1.) Izomorfak-e az alábbi gráfok?

(2.) Keressünk minimális költségű feszítő-fát az alábbi gráfban.



(3.) Létezik-e teljes párosítás a $K_{12,12,7,3}$ teljes négyrészes gráfban?

(4.) Legyenek az $\alpha \subseteq A \times A$ és $\beta \subseteq A \times A$ relációk kompatibilisek az $f: A \times A \to A$ kétváltozós függvényre nézve. Igazoljuk, hogy $\alpha \circ \beta$ is kompatibilis f-re nézve.

(5.) Legyen $H := \{ 2^k \cdot 7^\ell \mid 0 \le k \le 4$ és $0 \le \ell \le 6$ egész számok$\}$ és $x, y \in H$ esetén $x \le_S y$ pontosan akkor ha $x | y$. Keressünk maximális méretű láncot és antiláncot H-ban a $\le_S$ részben rendezésre nézve. Válaszainkat indokoljuk a H halmaz megfelelő felbontásaival.

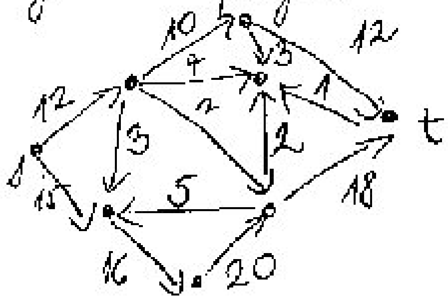
(6.) Adjuk meg az $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$ háromváltozós Boole függvény Zsegalkin polinomját. Vizsgáljuk meg az f nevezetes tulajdonságait.

2002.
május 14.

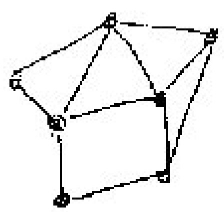
JAVÍTÓ ZÁRTHELYI DOLGOZAT
DISZKRÉT MATEMATIKA II.-BŐL
2001/2002-es tanév II. félév

1) Rajzolja fel azt a fát, melynek Prüfer-kódja: $(2,1,2,3,2,4,5,1,2,7,12)$!

2) Adjunk meg egy maximális (s,t) megengedett folyamot az alábbi hálózatban!



3) Létezik-e Euler-út az alábbi gráfban! És Euler-kör? (Válaszát indokolja!)



4) a) Igazolja, hogy ha ϱ és $\sigma \subseteq A \times A$ $(A \neq \emptyset)$ szimmetrikus reláció, akkor $\varrho \cup \sigma$ is szimmetrikus!

b) Értelmezzük a $\varrho \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ relációt a következőképpen:
$z_1 \varrho z_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ ($\arg z$ jelöli a komplex szám szögét!)
Vizsgálja meg a ϱ reláció nevezetes tulajdonságait! (Válaszát indokolja!)

5) Az $(L, \vee, \wedge)$ hálóban bizonyítsa be, hogy ha (1) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ $\forall x,y,z \in L$-re teljesül, akkor a (2) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ is teljesül!

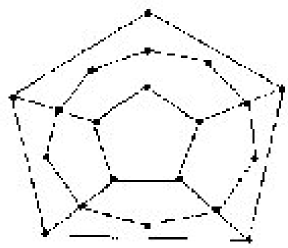
Miskolci Egyetem
Matematikai Intézet

2003. 03. 26.

I. ZÁRTHELYI DOLGOZAT DISZKRÉT MATEMATIKÁBÓL
B. csoport

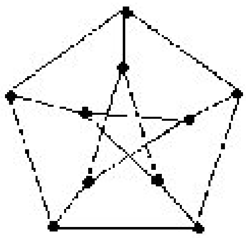
1. Rajzolja fel a (1,2,1,3,5,5,6,1,6,8,12) Prüfer-kódhoz tartozó fát! 3 pont

2. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfban? (Válaszát indokolja!) 3 pont



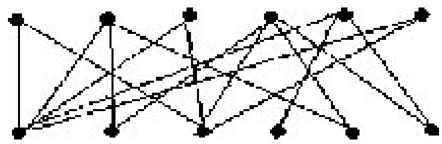
3. a) Magyarázza meg az r(3,3,12) jelentését és adjon felső becslést rá!
   b) Hány éle van a $K_{3,3,4}$ gráfnak? 4 pont

4. Síkba rajzolható-e a következő gráf? (Válaszát indokolja!)



3 pont

5. Létezik-e teljes párosítás az alábbi gráfban? (Válaszát indokolja!) Adja meg a független élek max. számát!



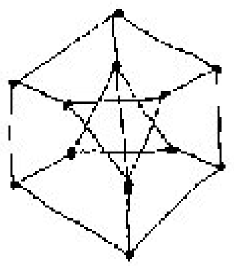
3 pont

6. Legyen a G(V,E) gráfban $|V|=8$ és $d(v_i)\geq 3$ $\forall v_i \in V$ esetén. (A $d(v_i)$ a v_i csúcs fokszámát jelöli.) Tegyük fel, hogy a gráf nem tartalmaz 3 és 5 hosszúságú köröket. Bizonyítsa be, hogy a G gráf páros gráf!

4 pont

D.

1. Síkba rajzolható-e az alábbi gráf?



2. Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 8$ és minden $i \in V$ csúcs fokszámára $d(i) \geq 3$ teljesül. Tudjuk még azt is, hogy Γ nem tartalmaz három és öt hosszúságú köröket. Igazoljuk, hogy Γ kétrészes gráf.

3. Egy $\Gamma = (V, E)$ gráfban $|V| = 32$ és $|E| \geq 410$. Kiszínezzük a Γ éleit két színnel; igazoljuk, hogy az így kiszínezett gráfban található egyszínű háromszög.